Библиографический список

1. Kaluza Th. Zum Unitätsproblem der Physik. Berl. Berichte. 1921. 966P.

2. Р а й д е р Л. Квантовая теория поля. М.: Мир, 1987. 512 с.

УДК 514.75

КАСАТЕЛЬНО (r,ℓ)-ОСНАЩЕННЫЕ ГИПЕРПОЛОСЫ SH_m ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

С.Ю.В о л к о в а

(Калининградское ВВМУ)

Рассматривается специальный класс $\hat{\mathcal{H}}(\Lambda,L)$-распределений проективного пространства [1], оснащающее M-распределение которого голономно. Тем самым выделяется специальный класс регулярных гиперполос проективного пространства P_n – касательно (r,ℓ)-оснащенные гиперполосы $S_{(r,\ell)}H_m$ [2], которые обозначим в дальнейшем кратко SH_m. В данной работе дано задание гиперполосы $SH_m \subset P_n$. Найдены поля основных квазитензоров гиперполосы SH_m, порождающие поля нормализаций гиперполосы SH_m в смысле Нордена-Чакмазяна, а также ассоциированных с ней различных подрасслоений. С помощью фокальных многообразий, внутренним инвариантным образом присоединенных к гиперполосе SH_m, выяснена геометрическая характеристика некоторых ее основных квазитензоров. Получен однопараметрический пучок нормализаций гиперполосы SH_m в смысле Э.Картана и двойственная нормализация гиперполосы SH_m в смысле Нордена-Тимофеева.

В работе используется следующая схема индексов:

$$J,K,L,\ldots=\overline{1,n};\quad \bar{J},\bar{K},\bar{L},\ldots=\overline{0,n};\quad p,q,s,t=\overline{1,r};\quad i,j,k,\ell=\overline{r+1,m};$$

$$\alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1,n-1};\quad a,b,c,d=\overline{1,m};\quad \hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma}=\overline{m+1,n};\quad \ell=m-r.$$

§ 1. Дифференциальные уравнения регулярной гиперполосы SH_m

1. Известно [1], [2], что система уравнений

$$\omega_0^{\hat{\alpha}}=0, \tag{1.1}$$

ассоциированная с M-распределением данного $\hat{\mathcal{H}}(\Lambda,L)$-распределения, вполне интегрируема тогда и только тогда, когда обращается в нуль тензор $r^{\hat{\alpha}}_{ab}=\frac{1}{2}(\Lambda^{\hat{\alpha}}_{ab}-\Lambda^{\hat{\alpha}}_{ba})$. В этом случае пространство P_n расслаивается на $(n-m)$-параметрическое семейство m-мерных гиперполос H_m, базисная поверхность каждой из которых несет двухкомпонентную сопряженную систему $S_{(r,\ell)}$ [3]. Такие гиперполосы называются касательно (r,ℓ)-оснащенными гиперполосами $S_{(r,\ell)}H_m$ [2, с.13] или гиперполосами SH_m. Уравнения (1.1) совместно с уравнениями (1.2), (1.4) [1, § 1], определяющими $\hat{\mathcal{H}}(\Lambda,L)$-распределение, задают гиперполосу $SH_m \subset P_n$ в репере 1-го порядка $\mathcal{R}^1$:

$$\begin{cases}\omega_0^{\hat{\alpha}}=0, \quad \omega_\alpha^n=0, \quad \omega_p^n=\Lambda^n_{pq}\omega^q=M^n_{pq}\omega^q,\\ \omega_i^n=L^n_{ij}\omega^j=M^n_{ij}\omega^j, \quad \omega_p^\alpha=\Lambda^\alpha_{pq}\omega^q=M^\alpha_{pq}\omega^q,\\ \omega_i^\alpha=L^\alpha_{ij}\omega^j=M^\alpha_{ij}\omega^j, \quad \omega_p^i=\Lambda^i_{pb}\omega^b,\\ \omega_i^p=L^p_{ib}\omega^b, \quad \omega_\alpha^p=N^p_{\alpha b}\omega^b, \quad \omega_\alpha^i=N^i_{\alpha b}\omega^b.\end{cases} \tag{1.2}$$

Продолжение уравнений (1.2) приводит к следующим дифференциальным уравнениям и соотношениям, которым подчинены компоненты фундаментального объекта 2-го порядка $\Gamma_2=\{\Lambda^{\hat{\alpha}}_{pq}, L^\alpha_{ij}, \Lambda^i_{pb}, L^p_{ib}, N^p_{\alpha b}, N^i_{\alpha b}\}$ гиперполосы SH_m (отметим, что функции $N^i_{\alpha b}, N^i_{\alpha b}$ определены в окрестности 2-го порядка):

$$\begin{cases}\nabla\Lambda^n_{pq}+\Lambda^n_{pq}\omega_0^0=\Lambda^n_{pqb}\omega^b, \quad \nabla L^n_{ij}+L^n_{ij}\omega_0^0=L^n_{ijb}\omega^b,\\ \nabla\Lambda^\alpha_{pq}+\Lambda^\alpha_{pq}\omega_0^0+\Lambda^n_{pq}\omega_n^\alpha=\Lambda^\alpha_{pqb}\omega^b, \quad \nabla L^\alpha_{ij}+L^\alpha_{ij}\omega_0^0+L^n_{ij}\omega_n^\alpha=L^\alpha_{ijb}\omega^b,\\ \nabla\Lambda^i_{pq}+\Lambda^i_{pq}\omega_0^0+\Lambda^n_{pq}\omega_n^i=\Lambda^i_{pqb}\omega^b, \quad \nabla\Lambda^i_{pj}+\Lambda^i_{pj}\omega_0^0-\delta^i_j\omega_p^0=\Lambda^i_{pjb}\omega^b,\\ \nabla L^p_{iq}+L^p_{iq}\omega_0^0-\omega_i^0\delta^p_q=L^p_{iqb}\omega^b, \quad \nabla L^p_{ij}+L^p_{ij}\omega_0^0+\Lambda^n_{ij}\omega_n^p=L^p_{ijb}\omega^b,\\ \nabla N^p_{\alpha q}+N^p_{\alpha q}\omega_0^0-\delta^p_q\omega_\alpha^0=N^p_{\alpha qb}\omega^b, \quad \nabla N^p_{\alpha j}+N^p_{\alpha j}\omega_0^0=N^p_{\alpha jb}\omega^b,\\ \nabla N^i_{\alpha q}+N^i_{\alpha q}\omega_0^0=N^i_{\alpha qb}\omega^b, \quad \nabla N^i_{\alpha j}+N^i_{\alpha j}\omega_0^0-\delta^i_j\omega_\alpha^0=N^i_{\alpha jb}\omega^b,\end{cases} \tag{1.3}$$

где

$$\Lambda^n_{[pq]}=0, \quad L^n_{[ij]}=0, \quad L^\alpha_{[ij]}=0, \quad L^\alpha_{[pq]}=0; \tag{1.4}$$

$$\begin{cases} N^t_{\alpha[p}\Lambda^n_{|t|q]}=0, \quad N^k_{\alpha[i}L^n_{|k|j]}=0, \quad N^p_{\alpha j}\Lambda^n_{pq}-N^k_{\alpha q}L^n_{kj}=0, \\ L^n_{ik}\Lambda^k_{[pq]}+\Lambda^n_{t[p}L^t_{|i|q]}=0, \quad \Lambda^n_{pt}L^t_{[ij]}+L^n_{k[i}\Lambda^k_{|p|j]}=0, \\ \Lambda^n_{t[p}N^t_{|k|q]}=0, \quad L^\alpha_{ik}\Lambda^k_{[pq]}+\Lambda^\alpha_{t[p}L^t_{|i|q]}=0, \\ L^n_{k[i}N^k_{|k|j]}=0, \quad \Lambda^\alpha_{pt}L^t_{[ij]}+L^\alpha_{k[i}\Lambda^k_{|p|j]}=0. \end{cases} \qquad (I.5)$$

2. Тензоры $\{\Lambda^n_{pq}\}, \{L^n_{ij}\}, \{M^n_{ab}\}=\{\Lambda^n_{pq}, L^n_{ij}\}$ – невырожденные [1], т.к. гиперполоса SH_m регулярная, и, следовательно, можно ввести обратные тензоры $\{\Lambda^{pq}_k\}, \{L^{ij}_n\}, \{M^{ab}_n\}$, компоненты которых удовлетворяют соответственно уравнениям:

$$\Lambda^{pq}_n\Lambda^n_{qt}=\delta^p_t, \quad \nabla\Lambda^{pq}_n-\Lambda^{pq}_n\omega^0_0=\Lambda^{pq}_{nb}\omega^b;$$
$$L^{ik}_n L^n_{kj}=\delta^i_j, \quad \nabla L^{ij}_n-L^{ij}_n\omega^0_0=L^{ij}_{nb}\omega^b; \qquad (I.6)$$
$$M^n_{ab}M^{bc}_n=\delta^c_a, \quad \nabla M^{bc}_n-M^{bc}_n\omega^0_0=M^{bc}_{nd}\omega^d.$$

Определители

$$\Lambda=\det\|\Lambda^n_{ij}\|\neq 0, \quad L=\det\|L^n_{ij}\|\neq 0, \quad M=\det\begin{Vmatrix}\Lambda^n_{pq} & 0\\ 0 & L^n_{ij}\end{Vmatrix}\neq 0$$

являются относительными инвариантами I-го порядка:

$$\begin{cases} d\ln\Lambda=2\omega^p_p-r(\omega^0_0+\omega^n_n)+\widetilde{\Lambda}_b\omega^b, \\ d\ln L=2\omega^i_i-\ell(\omega^0_0+\omega^n_n)+\widetilde{L}_b\omega^b, \\ d\ln M=2\omega^a_a-m(\omega^0_0+\omega^n_n)+\widetilde{M}_b\omega^b, \end{cases} \qquad (I.7)$$

где
$$\widetilde{\Lambda}_b=\Lambda^{pq}_n\Lambda_{pqb}, \quad \widetilde{L}_b=L^{ij}_n L_{ijb}, \quad \widetilde{M}_b=M^{ac}_n M_{acb}. \qquad (I.8)$$

§ 2. Нормали I-го и 2-го рода Нордена-Чакмазяна гиперполосы SH_m и ассоциированных с ней подрасслоений

Из результатов работы [1; § 2] немедленно следует, что каждая из совокупностей функций $\{L^p_n\}, \{L^i_n\}, \{L^0_p\}, \{L^0_i\}, \{\Lambda^\alpha_n\}, \{L^\alpha_n\}$, где

$$L^p_n=-\frac{1}{\ell}L^p_{ij}L^{ij}_n, \qquad L^i_n=-\frac{1}{r}\Lambda^i_{pq}\Lambda^{pq}_n, \qquad (2.1)$$
$$L^0_p=-\frac{1}{\ell}\Lambda^i_{pi}, \qquad L^0_i=-\frac{1}{r}L^p_{ip}, \qquad (2.2)$$
$$\Lambda^\alpha_n=-\frac{1}{r}\Lambda^\alpha_{pq}\Lambda^{pq}_n, \qquad L^\alpha_n=-\frac{1}{\ell}L^\alpha_{ij}L^{ij}_n, \qquad (2.3)$$

образует квазитензор I-го порядка гиперполосы SH_m. Квазитензоры (2.I)-(2.3) назовем основными квазитензорами гиперполосы $SH_m\subset P_n$. Аналогично находим основные квазитензоры 2-го порядка гиперполосы SH_m:

$$\hat{N}^0_\alpha=-\frac{1}{r}N^p_{\alpha p}, \qquad N^0_\alpha=-\frac{1}{\ell}N^i_{\alpha i}, \qquad (2.4)$$

$$\mathcal{M}^0_p=\frac{1}{r+2}\widetilde{\Lambda}^0_p+\Lambda^n_{pq}L^q_n, \qquad \mathcal{N}^0_p=\frac{1}{\ell}L^0_p+\Lambda^n_{pq}L^q_n,$$
$$\hat{\mathcal{N}}^0_p=\frac{1}{m+2}\widetilde{M}^0_p+\Lambda^n_{pq}L^q_n, \qquad \mathcal{M}^0_i=\frac{1}{r}\widetilde{\Lambda}^0_i+\Lambda^n_{ij}\Lambda^j_n, \qquad (2.5)$$
$$\mathcal{N}^0_i=\frac{1}{\ell+2}\widetilde{L}^0_i+L^n_{ij}\Lambda^j_n, \qquad \hat{\mathcal{N}}^0_i=\frac{1}{m+2}\widetilde{M}^0_i+L^n_{ij}\Lambda^j_n.$$

Квазитензоры (2.2), (2.4), (2.5) удовлетворяют соответственно одному из следующих дифференциальных уравнений

$$\nabla\nu^0_p+\omega^0_p=\nu^0_{pb}\omega^b, \quad \nabla\nu^0_i+\omega^0_i=\nu^0_{ib}\omega^b, \quad \nabla\nu^0_\alpha+\omega^0_\alpha=\nu^0_{\alpha b}\omega^b, \qquad (2.6)$$

а квазитензоры (2.I), (2.3) – соответственно одному из дифференциальных уравнений:

$$\nabla\nu^p_n=\omega^p_n+\nu^p_{nb}\omega^b, \quad \nabla\nu^i_n=\omega^i_n+\nu^i_{nb}\omega^b, \quad \nabla\nu^\alpha_n=\omega^\alpha_n+\nu^\alpha_{nb}\omega^b. \qquad (2.7)$$

Поля геометрических объектов $\{\nu^0_p\}, \{\nu^0_i\}, \{\nu^0_\alpha\}$, определяемые уравнениями (2.6), задают поля нормалей 2-го рода соответственно касательного Λ-подрасслоения (поле касательно оснащающих Λ-плоскостей), касательного L-подрасслоения (поле касательно оснащающих L-плоскостей) и χ-подрасслоения (поле характеристик гиперполосы SH_m). Аналогично, поля геометрических объектов $\{\nu^p_n\}, \{\nu^i_n\}, \{\nu^\alpha_n\}$, определяемые уравнениями (2.7), задают поля нормалей I-го рода соответственно Λ-подрасслоения, L-подрасслоения, χ-подрасслоения гиперполосы SH_m. Таким образом, приходим к предложению.

Т е о р е м а I. Основные квазитензоры (2.I)-(2.5) регулярной гиперполосы SH_m внутренним инвариантным образом задают в окрестностях I-го (2-го) порядка нормали I-го или 2-го рода в смысле Нордена-Чакмазяна соответственно Λ-подрасслоения, L-подрасслоения, χ-подрасслоения.

Поля объектов (2.2) порождают поле объекта (квазитензора I-го порядка)

$$\mathcal{L}^0_a \stackrel{def}{=} \{L^0_p, L^0_i\}, \qquad (2.8)$$

дифференциальные уравнения которого имеют вид

$$\nabla\mathcal{L}^0_a+\omega^0_a=\mathcal{L}^0_{ab}\omega^b. \qquad (2.9)$$

Поле объекта (2.8), определяемое уравнениями (2.9), порождает поле нормалей 2-го рода Ψ_{m-1} гиперполосы SH_m. Аналогично, поля квазитензоров (2.I) порождают поле квазитензора I-го порядка

$$\mathcal{L}^a_n=\{L^p_n, L^i_n\}, \qquad (2.10)$$

дифференциальные уравнения которого имеют вид

$$\nabla\mathcal{L}^a_n=\omega^a_n-\mathcal{L}^{ab}_n\omega^n_b. \qquad (2.11)$$

Поле объекта (2.10), заданное уравнениями (2.11), порождает поле нормалей I-го рода $\mathcal{N}_{n-m}$ гиперполосы SH_m.

Теорема 2. В дифференциальной окрестности I-го порядка внутренним инвариантным образом можно присоединить поля нормалей $\{L^0_p\}, \{L^0_i\}$ 2-го рода и поля нормалей $\{L^p_n\}, \{L^i_n\}$ I-го рода соответственно Λ-подрасслоения и L-подрасслоения, которые порождают соответственно поле нормалей 2-го рода $\mathcal{N}_{m-1}$ и поле нормалей I-го рода $\mathcal{N}_{n-m}$ гиперполосы SH_m.

§ 3. Фокальные многообразия и плоскости Нордена-Тимофеева

I. В этом параграфе выясним геометрический смысл некоторых основных квазитензоров (§ 2) гиперполосы SH_m. Пусть гиперполоса SH_m оснащена в смысле Нордена-Чакмазяна [4, § 4]. Точку A_n репера $\mathcal{R}^1$ поместим в нормаль I-го рода $N_{n-m}(A_0)$ гиперполосы SH_m. Тогда

$$\omega^a_\alpha = N^a_{\alpha b}\omega^b. \tag{3.1}$$

Такой репер $\mathcal{R}^1$ первого порядка назовем репером $\mathcal{R}^1(N)$. Поле нормалей I-го рода $N_{n-m}(A_0)$ (поле N-плоскостей) и поле касательно τ-оснащающих Λ-плоскостей определяют на базисной поверхности $V_m \subset SH_m$ поле $(n-\ell)$-мерных плоскостей $\Pi_{n-\ell}(A_0)$ (поле Π-плоскостей). Относительно репера $\mathcal{R}^1(N)$ конечные уравнения Π-плоскости имеют вид

$$x^i = 0. \tag{3.2}$$

Определение. Точку $\mathcal{F}$, принадлежащую некоторому (исходному) элементу поля геометрического объекта, заданного на поверхности $V_m \subset SH_m$, будем называть фокальной точкой этого элемента, соответствующей данному на поверхности направлению, если точка $\mathcal{F}$ принадлежит и соседнему элементу этого поля, полученному при смещении точки A_0 по поверхности в этом направлении [5, § 9].

Точка $\mathcal{F} \in \Pi(A_0)$ определяется координатами $x^{\bar{J}}$, удовлетворяющими уравнению (3.2). При смещении плоскости $\Pi(A_0)$ вдоль некоторого направления поверхности, точка $\mathcal{F}$ перейдет в новую точку $\tilde{\mathcal{F}}\{\tilde{x}^{\bar{J}}\}$, где

$$\tilde{x}^{\bar{J}} \cong x^{\bar{J}} - \omega^{\bar{J}}_{\bar{K}} x^{\bar{K}}. \tag{3.3}$$

Потребуем, чтобы точка $\tilde{\mathcal{F}} \in \Pi(A_0)$. Тогда из (3.3) следует:

$$\omega^i_0 x^0 + \omega^i_p x^p + \omega^i_\alpha x^\alpha = 0, \quad x^i = 0. \tag{3.4}$$

Учитывая (3.1), (1.2), уравнения (3.4) приведем к виду

$$(\delta^i_b x^0 + \Lambda^i_{pb} x^p + N^i_{\alpha b} x^\alpha)\omega^b = 0, \quad x^i = 0. \tag{3.5}$$

Фокальное направление на базисной поверхности $V_m \subset SH_m$ определим уравнениями

$$\omega^{\hat{\alpha}}_0 = 0, \quad \omega^b_0 = \rho^b\theta \quad (d\theta = \theta\wedge\theta_1). \tag{3.6}$$

В силу (3.6) уравнения (3.5) представим в виде

$$(\delta^i_b x^0 + \Lambda^i_{pb} x^p + W^i_{\alpha b} x^\alpha)\rho^b = 0, \quad x^i = 0 \quad (\rho^{\hat{\alpha}} = 0). \tag{3.7}$$

Найдем фокальное многообразие, принадлежащее плоскости $\Pi(A_0)$, при смещении точки A_0 вдоль кривых

$$\omega^{\hat{\alpha}}_0 = 0, \quad \omega^i_0 = \rho^i\theta, \quad \omega^p_0 = 0 \quad (\rho^{\hat{\alpha}} = 0, \ \rho^p = 0), \tag{3.8}$$

принадлежащих L-подрасслоению. При этом система (3.7) приводится к следующей

$$(\delta^i_j x^0 + \Lambda^i_{pj} x^p + N^i_{\alpha j} x^\alpha)\rho^j = 0, \quad x^i = 0. \tag{3.9}$$

Нетривиальные решения уравнений (3.9) относительно ρ^j получим при условиях

$$x^i = 0, \quad \det\|\delta^i_j x^0 + \Lambda^i_{pj} x^p + N^i_{\alpha j} x^{\hat{\alpha}}\| = 0. \tag{3.10}$$

Уравнения (3.10) определяют фокальное многообразие в плоскости $\Pi(A_0)$, соответствующее смещениям точки A_0 по кривым (3.8), принадлежащим полю L-плоскостей. В общем случае мы получаем алгебраическое многообразие размерности $(n-\ell-1)$ порядка ℓ, которое обозначим $\Phi_{n-\ell-1}(\Pi)$.

Соответствующая касательно оснащающая Λ-плоскость пересекает многообразие $\Phi_{n-\ell-1}(\Pi)$ (3.10) по алгебраическому многообразию $\Phi_{\tau-1}(\Lambda)$ порядка ℓ размерности $(\tau-1)$:

$$x^i = 0, \quad x^\alpha = 0, \quad \det\|\delta^i_j x^0 + \Lambda^i_{pj} x^p\| = 0. \tag{3.11}$$

Линейная поляра точки A_0 относительно фокального многообразия $\Phi_{\tau-1}(\Lambda)$ задается уравнениями:

$$x^0 - L^0_p x^p = 0, \quad x^i = 0, \quad x^{\hat{\alpha}} = 0. \tag{3.12}$$

Выясняется, таким образом, геометрический смысл нормали $\{L^0_p\}$ 2-го рода Λ-плоскости, которую обозначим $\lambda_{\tau-1}(A_0)$ (λ-плоскость): λ-плоскость является линейной полярой точки A_0 относительно фокального многообразия $\Phi_{\tau-1}(\Lambda)$ (3.11).

2. Характеристическая плоскость $X_{n-m-1}(A_0)$ пересекает фокальное многообразие $\Phi_{n-\ell-1}(\Pi)$ (3.10) по многообразию:

$$x^n = 0, \quad x^p = 0, \quad \det\|x^0\delta^i_j + N^i_{\alpha j}x^\alpha\| = 0, \tag{3.13}$$

которое обозначим $\Phi_{n-m-2}(X)$. Фокальное многообразие (3.13), лежащее в характеристике $\chi_{n-m-1}(A_0)\subset SH_m$, представляет собой многообразие размерности $(n-m-2)$ порядка ℓ. Линейная поляра точки A_0 относительно фокального многообразия $\Phi_{n-m-2}(\chi)$ (3.13) есть плоскость $\chi_{n-m-2}(A_0)\subset\chi_{n-m-1}(A_0),\ A_0\notin\chi_{n-m-2}(A_0)$:

$$x^n=0,\ \ x^p=0,\ \ x^0-N^0_{\hat\alpha}x^{\hat\alpha}=0. \qquad (3.14)$$

Таким образом, выясняется геометрический смысл квазитензора $\{N^0_{\hat\alpha}\}$ (2.4): он задает в каждой точке $A_0\in V_m$ нормаль 2-го рода $\mathcal{N}_{n-m-2}(A_0)$ характеристики $\chi_{n-m-1}(A_0)\subset SH_m$, которая является линейной полярой точки A_0 относительно фокального многообразия $\Phi_{n-m-2}(\chi)$ (3.13).

3. Система уравнений

$$x^a=0,\ \ \det\|\delta^i_j x^0+N^i_{\hat\alpha j}x^{\hat\alpha}\|=0 \qquad (3.15)$$

задает пересечение нормали $N_{n-m}(A_0)$ I-го рода гиперполосы SH_m с фокальным многообразием $\Phi_{n-\ell-1}(\mathcal{N})$ (3.10). Многообразие (3.15) обозначим символом $\Phi_{n-m-1}(N)$. Оно представляет собой фокальное многообразие размерности $(n-m-1)$ порядка ℓ, принадлежащее нормали $N_{n-m}(A_0)$ I-го рода гиперполосы SH_m. Линейная поляра точки A_0 относительно фокального многообразия $\Phi_{n-m-1}(N)$ (3.15) есть $(n-m-1)$-плоскость $\mathcal{K}_{n-m-1}(A_0)$, которая задается уравнениями

$$x^a=0,\ \ x^0-N^0_{\hat\alpha}x^{\hat\alpha}=0, \qquad (3.16)$$

где квазитензор 2-го порядка

$$N^0_{\hat\alpha}=-\frac{1}{\ell}N^i_{\hat\alpha i} \qquad (3.17)$$

удовлетворяет уравнениям

$$\nabla N^0_{\hat\alpha}+\omega^0_{\hat\alpha}=N^0_{\hat\alpha b}\omega^b. \qquad (3.18)$$

Таким образом, поле объекта $\{N^0_{\hat\alpha}\}$, определяемое дифференциальными уравнениями (3.18), задает поле оснащающих плоскостей $\mathcal{K}_{n-m-1}(A_0)$ в смысле Картана гиперполосы SH_m.

4. Рассмотрим поле $(n-r)$-плоскостей $\vartheta_{n-r}(A_0)=[N_{n-m}(A_0),L(A_0)]$. Аналогично (п.I, § 3) введем в рассмотрение фокальное многообразие $\Psi_{n-r-1}(\vartheta)$ размерности $(n-r-1)$ порядка r, лежащее в плоскости $\vartheta_{n-r}(A_0)$, которое зададим уравнениями

$$x^p=0,\ \det\|\delta^p_q x^0+L^p_{iq}x^i+N^p_{\hat\alpha q}x^{\hat\alpha}\|=0. \qquad (3.19)$$

Многообразие (3.19) получено смещением точки A_0 по кривым

$$\omega^{\hat\alpha}=0,\ \omega^i_0=0,\ \omega^p=\rho^p\theta\ \ (\rho^{\hat\alpha}=0,\ \rho^i=0), \qquad (3.20)$$

принадлежащим Λ-подрасслоению. Соответствующая L-плоскость пересекает многообразие $\Psi_{n-r-1}(\vartheta)$ (3.19) по алгебраическому многообразию $\Psi_{\ell-1}(L)$ порядка r размерности $(\ell-1)$:

$$x^p=0,\ \ x^{\hat\alpha}=0,\ \ \det\|\delta^p_q x^0+L^p_{iq}x^i\|=0. \qquad (3.21)$$

Линейная поляра точки $A_0\in V_m$ относительно фокального многообразия $\Psi_{\ell-1}(L)$ (3.21) имеет вид

$$x^0-L^0_i x^i=0,\ \ x^p=0,\ \ x^{\hat\alpha}=0. \qquad (3.22)$$

Уравнения (3.22) задают в каждой точке $A_0\in V_m$ плоскость $\ell_{\ell-1}(A_0)$-нормаль 2-го рода L-плоскости. Назовем эту плоскость ℓ-плоскостью. Таким образом, выясняется геометрический смысл основного квазитензора $\{L^0_i\}$ (2.2): квазитензор $\{L^0_i\}$ задает в окрестности 2-го порядка ℓ-плоскость (3.22), которая является линейной полярой точки A_0 относительно фокального многообразия $\Psi_{\ell-1}(L)$ (3.21).

5. Плоскость $\mathcal{V}_{m-1}(A_0)=[\lambda(A_0),\ell(A_0)]$, натянутую на λ-плоскость (3.12) и ℓ-плоскость (3.22), назовем $\mathcal{V}$-плоскостью. Относительно локального репера $\mathcal{R}^1(N)$ $\mathcal{V}$-плоскость задается уравнениями

$$y^0-\mathcal{L}^0_a y^a=0,\ \ y^{\hat\alpha}=0. \qquad (3.23)$$

Геометрическую интерпретацию объекта $\{\mathcal{L}^0_a\}$ для касательно r-оснащенных поверхностей $M_{m,r}$ проективного пространства дал А.Ф.Домбровский [6]. Следуя работе [6], $\mathcal{V}$-плоскость будем называть плоскостью Нордена-Тимофеева 2-го рода регулярной гиперполосы SH_m. Двойственную $\mathcal{V}$-плоскости нормаль I-го рода $\mathcal{V}_{n-m}(A_0)$, определенную объектом $\{\mathcal{L}^a_n\}$ (2.10) в окрестности 2-го порядка, назовем соответственно плоскостью Нордена-Тимофеева I-го рода регулярной гиперполосы SH_m. Нормализацию регулярной гиперполосы SH_m плоскостями Нордена-Тимофеева I-го и 2-го рода назовем нормализацией этой гиперполосы в смысле Нордена-Тимофеева.

Т е о р е м а 3. В дифференциальной окрестности I-го порядка регулярной гиперполосы SH_m внутренним инвариантным образом присоединяется ее нормализация в смысле Нордена-Тимофеева.

6. Пересечение фокального многообразия $\Psi_{n-r-1}(\vartheta)$ (3.19) характеристикой $\chi_{n-m-1}(A_0)$ определяется уравнениями

$$x^{\hat\alpha}=0,\ \ \det\|\delta^p_q x^0+N^p_{\alpha q}x^{\alpha}\|=0. \qquad (3.24)$$

Уравнения (3.24) задают фокальное многообразие характеристики

$\chi_{n-m-1}(A_0)$ при смещении точки A_0 по кривым, принадлежащим Λ-подрасслоению. Многообразие (3.24) обозначим $\Psi_{n-m-2}(\chi)$. Оно представляет собой алгебраическое многообразие размерно $(n-m-2)$ порядка τ. Линейная поляра точки A_0 относительн многообразия $\Psi_{n-\tau-1}(\chi)$ (3.24) имеет вид:

$$x^{\hat a}=0, \qquad x^0-\hat N^0_\alpha x^\alpha=0. \tag{3.25}$$

Квазитензор $\{\hat N^0_\alpha\}$ (2.4) 2-го порядка в каждой точке $A_0\in V_m$ определяет нормаль 2-го рода в смысле Нордена характеристи $\chi_{n-m-1}(A_0)$. Следовательно, квазитензоры $\{\hat N^0_\alpha\}$ (2.4), $\{N^0_\alpha\}$ (3.I7) (в общем случае они линейно независимы) определяют в характеристике $\chi(A_0)$ пучок ее нормалей 2-го рода, заданный пучком квазитензоров 2-го порядка:

$$N^0_\alpha(\sigma)=\hat N^0_\alpha+\sigma(N^0_\alpha-\hat N^0_\alpha)=\hat N^0_\alpha+\sigma\hat n_\alpha, \tag{3.26}$$

где $\hat n_\alpha=N^0_\alpha-\hat N^0_\alpha$ — тензор 2-го порядка.

7. Фокальное многообразие $\Psi_{n-\tau-1}(\vartheta)$ (3.I9) пересекает плоскость $N_{n-m}(A_0)$ по многообразию $\varphi_{n-m-1}(N)$, которое соот тствует смещениям точки A_0 по кривым, принадлежащим касате ному Λ-подрасслоению, т.е. по многообразию

$$x^a=0, \quad \det\|\delta^p_q x^0+N^p_{\hat\alpha q}x^{\hat\alpha}\|=0. \tag{3.27}$$

Линейная поляра точки A_0 относительно фокального многообра $\Psi_{n-m-1}(N)$ есть $(n-m-1)$-плоскость $\Pi_{n-m-1}(A_0)$, которая задает уравнениями

$$x^a=0, \quad x^0-N^0_{\hat\alpha}x^{\hat\alpha}=0, \tag{3.28}$$

где квазитензор 2-го порядка

$$N^0_{\hat\alpha}=-\frac{1}{\tau}N^p_{\hat\alpha p} \tag{3.29}$$

удовлетворяет уравнениям

$$\nabla N^0_{\hat\alpha}+\omega^0_{\hat\alpha}=N^0_{\hat\alpha b}\,\omega^b. \tag{3.30}$$

Так как квазитензоры 2-го порядка $\{\hat N^0_{\hat\alpha}\}$ и $\{N^0_{\hat\alpha}\}$ в общем с чае линейно независимы, то эти квазитензоры в каждой N-плоскости (нормали I-го рода) порождают пучок оснащающих пл скостей в смысле Э.Картана. Этот пучок зададим пучком квази зоров 2-го порядка:

$$N^0_{\hat\alpha}(\rho)=\hat N^0_{\hat\alpha}+\rho\,(N^0_{\hat\alpha}-\hat N^0_{\hat\alpha})=\hat N^0_{\hat\alpha}+\rho\,\hat n^0_{\hat\alpha}, \tag{3.3I}$$

где $\hat n^0_{\hat\alpha}=N^0_{\hat\alpha}-\hat N^0_{\hat\alpha}$ — тензор 2-го порядка. Отметим, что пучок (3.3I) порождает пучок (3.26), определяющий в каждой характ ристике пучок ее нормалей 2-го рода в смысле Нордена.

Т е о р е м а 4. В дифференциальной окрестности 2-го

дка гиперполосы SH_m внутренним инвариантным образом присо иняется однопараметрический пучок (3.3I) ее нормализаций в ысле Э.Картана, который порождает (в свою очередь) однопараметрический пучок нормализаций 2-го рода в смысле Нордена ля характеристик данной гиперполосы SH_m.

Библиографический список

I. В о л к о в а С.Ю. $\mathcal{H}(\Lambda,L)$-распределения проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий гур: Межвуз. темат. сб. научн. тр. / Калинингр. ун-т. Калинград, 1991. Вып.22. С.23-25.

2. П о п о в Ю.И. Основы теории трехсоставных распреде ний проективного пространства. Монография. Изд-во С.-Петер рг. ун-та, 1992. 172 с.

3. А к и в и с М.А. О строении двухкомпонентных сопря нных систем // Труды геометрич. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. I. С.7-31.

4. П о п о в Ю.И. Общая теория регулярных гиперполос. ебное пособие. Калининград, Калинингр. ун-т, 1983. 82 с.

5. Л а п т е в Г.Ф., О с т и а н у Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связ ости // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.49-

6. Д о м б р о в с к и й Р.Ф. О неголономных композици на поверхностях $M_{m,\tau}$ в P_n. Всес. научн. конф. по неев идовой геометрии: "150 лет геометрии Лобачевского". Тезисы кл. М., 1976. С.69.

К 514.75

СПЕЦИАЛЬНЫЕ КЛАССЫ КОНГРУЭНЦИЙ С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ В ЛИНИЮ ФОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

О.О. Г у с е в а

(Калининградский государственный университет)

Рассмотрены инварианты, ассоциированные с поверхностью S, введенной в работе [1]. Получены условия совпадения оверхности (A_0) с поверхностью F_1. Изучены специальные